UNIDAD 7
Operaciones con rectas y planos.-

1. INTERSECCION DE PLANOS.

El elemento común o intersección de dos planos es una recta que conoceremos cuando determinemos dos de sus puntos.

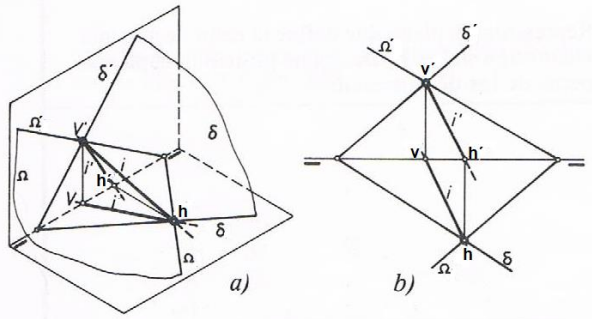

Fig. 38

En la **Fig. 38-a** tenemos los planos δ y Ω. Si cortamos a estos dos planos por el plano H, obtenemos como intersección en cada uno de ellos las trazas horizontales δ y Ω . Estas trazas se cortan en el punto H(**h - h´**), que es de la intersección buscada. Igualmente, cortando a los planos dados por el plano V, obtenemos en cada uno de ellos las trazas verticales δ' y Ω', las cuales se cortan en el punto V(**v - v´**). La recta intersección es i(i -i'), que une los puntos *H* y *V*. Resumiendo: *La recta intersección de dos planos es la que resulta de unir los puntos donde se cortan las trazas del mismo nombre de los dos planos.*

En el caso de que dos trazas sean paralelas, la intersección también será paralela a ellas. Así, en la **Fig. 39-a y b** tenemos dos planos cuyas trazas verticales son paralelas y la intersección i -i' resulta una recta frontal de plano, es decir, paralela al plano vertical. En este caso, la recta i -i' pasa por el punto **h - h´** y por el punto del infinito de las trazas verticales α' y β'.

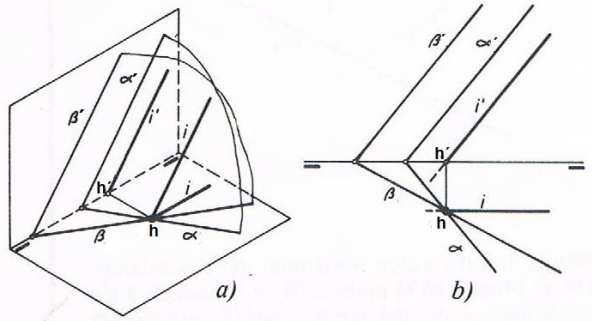

Fig. 39

Cuando las trazas del mismo nombre de los dos planos sean paralelas entre sí y paralelas a L.T., la recta intersección resulta también paralela a la L.T. y se puede calcular recurriendo a la proyección de perfil **(Fig. 40)**.

En este caso, las trazas α'' y γ'' se cortan en i'' , la cual se proyecta sobre los planos H y V según i' e i' .

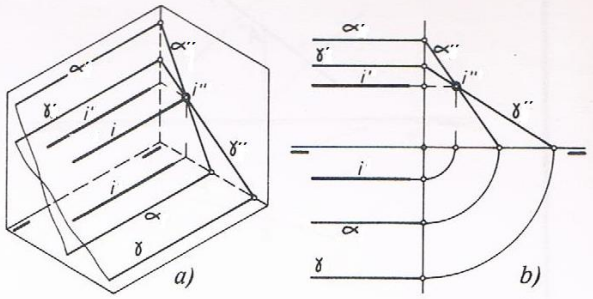

Fig. 40

Si las trazas del mismo nombre de los dos planos son paralelas entre sí y oblicuas a L.T., los planos no tienen recta de intersección, ya que son paralelos.

Cuando dos de las trazas del mismo nombre de dos planos, por ejemplo, α' y β' de la **Fig. 41,** se cortan fuera de los límites del dibujo, sólo podemos disponer del punto **h-h´** donde se cortan las trazas horizontales α y β de los dos planos.

El cálculo de otro punto que junto con el **h - h´** nos permita representar la recta i -i' , se efectúa con ayuda de un plano auxiliar ξ , paralelo al P.V. Las intersecciones de este plano con cada uno de los dos planos α y β son las rectas *a* y *b*, respectivamente. El punto común de ambas, I -I' , que pertenece simultáneamente a los tres planos α, β y ξ , pertenecerá, por tanto, a la recta de intersección de los dos primeros. Los puntos **h - h´** e I -I' determinan la recta intersección i -i' **(Fig. 41).**

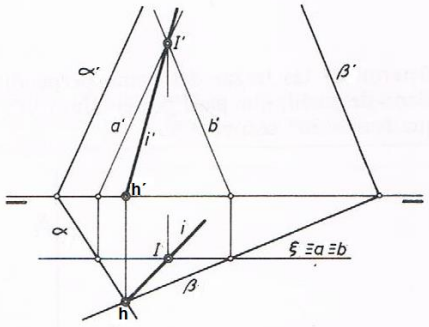

Fig. 41

Se opera de la misma forma cuando son las trazas horizontales de los planos las que se cortan fuera de los límites del dibujo.

En el caso de que tanto las dos trazas verticales como las dos horizontales de dos planos no lleguen a cortarse dentro de los límites del dibujo, y al no conocer de forma inmediata ningún punto de la recta intersección, se deberán utilizar dos planos auxiliares **(Fig. 42)**.

Con ayuda del plano ξ' , paralelo al P.H., obtenemos las rectas a -a' y b -b' , que se cortan en el punto *M* de la recta *i* de intersección.

Con ayuda del plano Ω_1, paralelo al P.V., se obtienen las rectas c -c' y d -d' , que se cortan en el punto N de la recta *i* de intersección.

La recta i -i' que une los puntos M -M' y N -N' es la intersección de los dos planos.

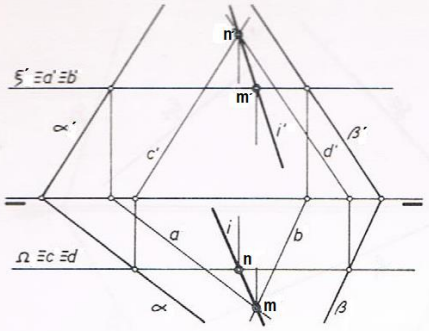

Fig. 42

2. INTERSECCION DE RECTA Y PLANO.

Una recta y un plano se cortan según un punto.

Para hallar el punto de intersección de una recta y un plano **(Fig. 43)**, se hace pasar por la recta dada un plano auxiliar cualquiera, el cual corta al plano dado según otra recta. El punto donde la recta así obtenida corta a la recta dada, es el punto de intersección buscado. La **Fig. 43** resuelve el problema en el espacio. Se parte del plano α y de la recta *r*. Se utiliza como plano auxiliar el plano Ω, que corta al plano α según la recta *i*. El punto *M* donde se cortan las rectas *r* e *i* es el punto de intersección.

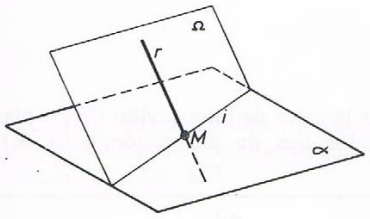

Fig. 43

Para resolver el problema en diédrico, se puede utilizar como plano auxiliar un plano oblicuo cualquiera; sin embargo, es preferible emplear un plano proyectante, ya sea horizontal o vertical, pues así se simplifica la obtención de la recta *i* **(Fig. 44)**.

Tenemos el plano α (α -α') y la recta r(r -r') y hay que hallar su punto de intersección **m - m'** . Por la recta *r* se hace pasar el plano proyectante vertical de ella Ω -Ω', de forma que Ω' está confundida con r' . Este plano Ω corta al α según la recta i -i' y ésta corta a la recta r -r' en el punto **m - m'** , que es la solución.

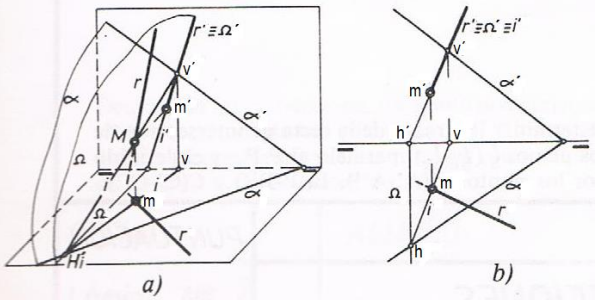

Fig. 44

Cuando el plano sea oblicuo a los de proyección y la recta sea perpendicular a uno de éstos, el procedimiento es el mismo, si bien el plano auxiliar que contenga a la recta se puede elegir horizontal o frontal.

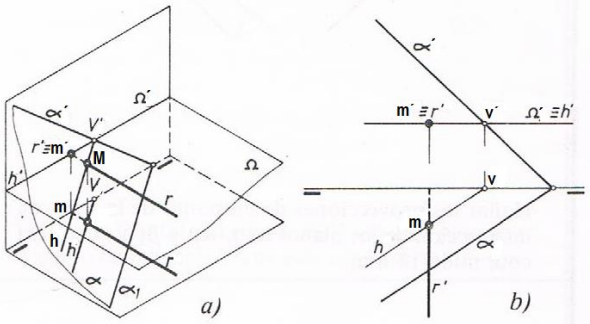

Fig. 45

Así, en la **Fig. 45** tenemos el plano oblicuo α -α' y la recta r -r' , perpendicular al plano V. Se hace pasar por ella el plano horizontal Ω', el cual corta al α según la horizontal h -h' . Esta horizontal corta a la recta r -r' en el punto **m - m'** , que es el de intersección buscado.

Obsérvese que la traza Ω' ha de pasar por r' y que el punto **m'** está confundido con r' , ya que es una recta de punta respecto al plano vertical.

7.1. PUNTO COMUN A TRES PLANOS.

Como resumen de los problemas de intersección de dos planos y de recta y plano, resolvemos en la **Fig. 46** el problema de hallar el punto común a tres planos.

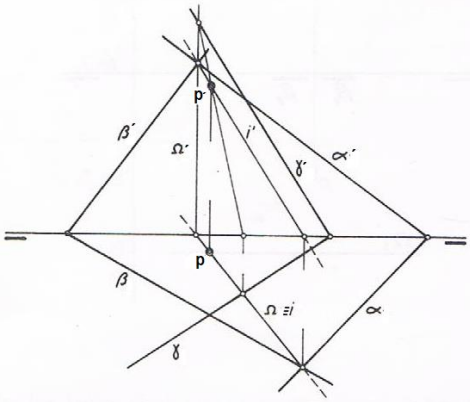

Fig. 46

Tenemos los planos α -α', β -β' y γ -γ'. Se toman dos de ellos, por ejemplo, α y β, y hallamos la recta de intersección i -i' de ellos. A continuación se halla el punto de intersección de esta recta i -i' con el tercer plano γ. Esto se consigue con ayuda del auxiliar Ω -Ω', obteniendo el punto **p - p'** común a los tres planos.

8. PARALELISMO.

Los casos de paralelismo que se pueden presentar son los siguientes:

A. Entre dos rectas.
B. Entre recta y plano.
C. Entre dos planos.

A. *Si dos rectas son paralelas en el espacio, las proyecciones ortogonales del mismo nombre de las dos rectas son también rectas paralelas.*

En la **Fig. 47-a** tenemos dos rectas *r* y *s* paralelas en el espacio; sus proyecciones r y s son paralelas y lo mismo ocurre con las proyecciones r' y s' .

Para trazar por un punto conocido P(p - p´) la recta paralela a otra recta dada r(r -r') **(Fig. 47-a y b),** se traza por p la paralela a r' y por p´ la paralela a r' , obteniendo así las proyecciones s' y s'' de la recta buscada.

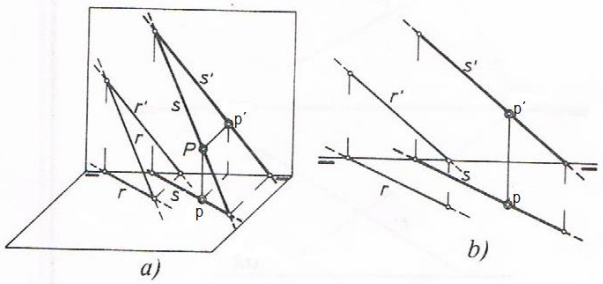

Fig. 47

B. *Una recta es paralela a un plano cuando lo es, al menos, a una recta contenida en dicho plano* **(Fig. 48).**

La recta *r* es paralela al plano α por serlo a la recta *s* de él. Todas las rectas del plano α que sean paralelas a *s*, lo serán también a *r*.

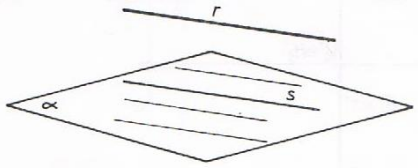

Fig. 48

El problema de trazar por un punto un plano paralelo a una recta dada, tiene infinitas soluciones, es decir, cualquiera de los infinitos planos que contengan a la recta que pase por el punto y sea paralela a la recta dada.

Para trazar por una recta dada el plano paralelo a otra recta también dada, se toma un punto *P* de la primera y se traza por él la recta paralela a la segunda. El plano definido por ambas rectas, con *P* como punto común, es la solución.

En la **Fig. 49-a y b,** en el espacio y en proyecciones, se resuelve el problema de trazar por la recta s -s' , dada, el plano α, que sea paralelo a la recta r -r' , también dada. Para ello, se toma el punto P'-P'' de la recta s -s' y se traza por él la recta t -t' , paralela a la r -r' . Las rectas *s* y *t* definen el plano α-α', cuyas trazas pasan por las trazas del mismo nombre de las rectas.

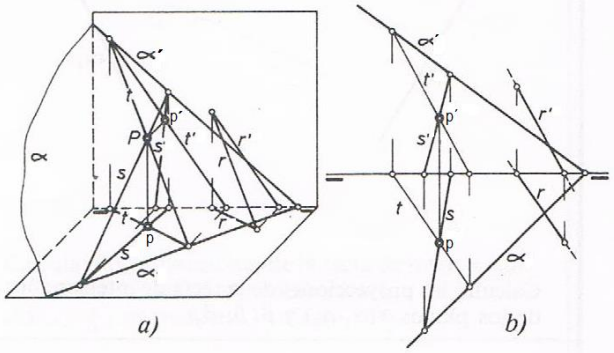

Fig. 49

C. *Si dos planos son paralelos en el espacio, tienen paralelas las trazas del mismo nombre* **(Fig. 50).** Como puede apreciarse, α y β son paralelas y lo mismo ocurre con α' y β' .

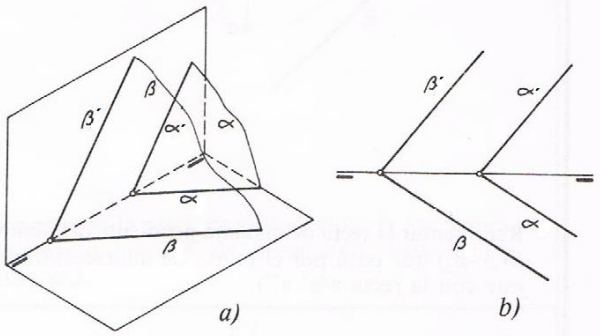

Fig. 50

Para trazar por un punto Q -Q' el plano paralelo a otro plano dado α **(Fig. 51),** se traza por el punto *Q* la recta horizontal de plano, de forma que la proyección h sea paralela a α . Por la traza vertical v de la recta *h* pasará la traza Ω', paralela a α', y por el punto donde Ω' corte a la L.T., se traza la paralela a α , teniendo así Ω .

Se puede resolver este problema haciendo pasar por el punto *Q* una recta frontal en vez de una horizontal.

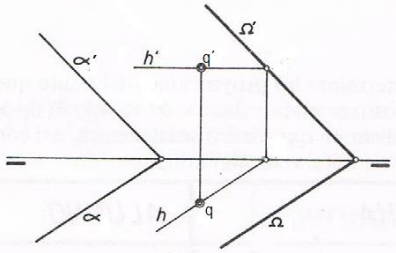

Fig. 51

9. PERPENDICULARIDAD.

Vamos a estudiar los siguientes casos de perpendicularidad:

A. Entre recta y plano e inverso.
B. Entre recta y recta.
C. Entre plano y plano.
D. Entre plano y dos planos.

Del primero de los casos apuntados depende todo el tema de perpendicularidad, de ahí la importancia de este primer caso.

A. *Una recta es perpendicular a un plano cuando lo es a dos rectas de dicho plano que pasan por su pie* **(Fig. 52).**

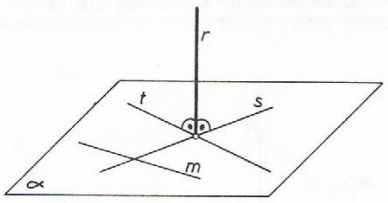

Fig. 52

Cuando una recta es perpendicular a un plano, lo es a todas las rectas de él, cortándolas o cruzándose con ellas.

En proyecciones diédricas, *una recta es perpendicular a un plano cuando las proyecciones de la recta son perpendiculares a las trazas del mismo nombre del plano.*

En la **Fig. 53** tenemos un plano α -α' y un punto **p** -**p'** . Para trazar por el punto *P* la recta r -r' perpendicular al plano α, se traza por **p** la perpendicular r a α y por **p'** la perpendicular r' a α'. Situadas en el plano una recta horizontal h -h' y una frontal f -f' , observamos que r es perpendicular a h y que r' es perpendicular a f' .

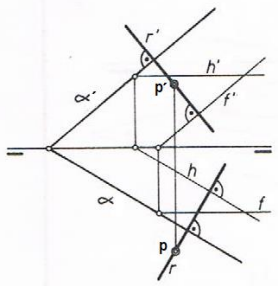

Fig. 53

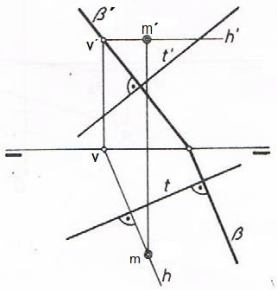

Fig. 54

Resolvemos el problema inverso en la **Fig. 54**. Para trazar por el punto **m** - **m'** el plano β -β' perpendicular a la recta t -t' dada, se traza por el punto **m** - **m'** la horizontal h -h' de forma que la proyección h sea perpendicular a t . Se halla la traza vertical **v'** de esta horizontal y por **v'** pasa la traza vertical β' del plano, que es perpendicular a t' . La traza horizontal β es perpendicular a t .

También puede utilizarse una recta frontal en vez de una horizontal para obtener el plano perpendicular.

B. *En general, las proyecciones de dos rectas perpendiculares en el espacio son dos rectas oblicuas.*

Unicamente si una de las dos rectas es paralela a uno de los planos de proyección, las proyecciones de ambas, sobre este plano, son dos rectas perpendiculares. En la **Fig. 55** la recta *r* es horizontal, es decir, paralela al plano H, y la recta *s* es perpendicular a la *r*. Las proyecciones r' y s' de ambas sobre el plano H son perpendiculares.

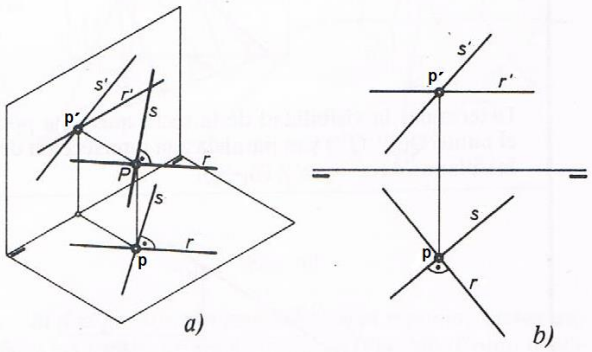

Fig. 55

Para trazar por un punto *P* la recta *s* perpendicular a otra recta *r* dada **(Fig. 56)**, se traza por el punto *P* el plano α perpendicular a la recta *r*, se halla el punto *Q* de intersección de la recta *r* y del plano α y la recta que une los puntos *P* y *Q* es la solución.

En la **Fig. 57** se resuelve el problema en proyecciones. Tenemos la recta r -r' y el punto **p** - **p'** . Se traza la horizontal h -h' por el punto *P*, de forma que h sea perpendicular a r ; por el punto **v'** pasa la traza vertical α' del plano perpendicular a la recta *r*, quedando también definida α , perpendicular a r . El plano α -α' corta a la recta r -r' en el punto **q** - **q'** , obtenido con ayuda del plano proyectante horizontal β -β'. La recta s -s' que pasa por **p** - **p'** y **q** - **q'** es la solución.

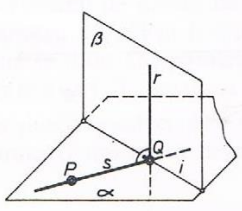

Fig. 56

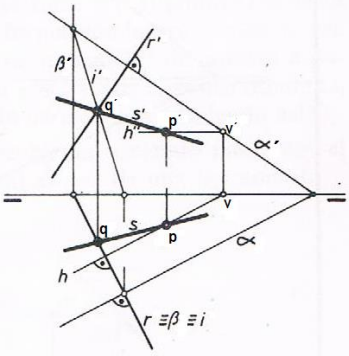

Fig. 57

C. *Dos planos son perpendiculares entre sí cuando en uno de ellos hay una recta perpendicular al otro.* Los planos α y β de la **Fig. 56** son perpendiculares porque en el segundo hay una recta *r*, perpendicular al primero.

Por un punto P se pueden trazar infinitos planos perpendiculares a otro plano α, como infinito es el número de planos que pasan por la recta *t*, perpendicular trazada por el punto *P* al plano α **(Fig. 58).**

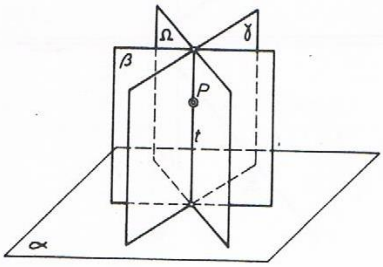

Fig. 58

Por una recta dada, no perpendicular a un plano dado, sólo pasa un plano perpendicular a éste **(Fig. 59).** Para trazar por la recta *m* el plano β perpendicular al plano α, se toma un punto *P* de la recta *m* y se traza por él la recta *n*, perpendicular al plano α. Las rectas *m* y *n* definen el plano β buscado.

En la **Fig. 60** se resuelve el problema en proyecciones. Tenemos la recta m -m' y el plano α -α'. Por el punto p - p' de la recta m -m' se traza la recta n -n' perpendicular al plano α -α'. Las rectas m -m' y n -n' definen el plano β solución.

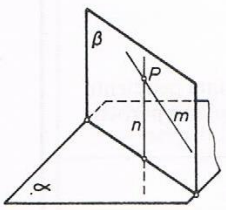

Fig. 59

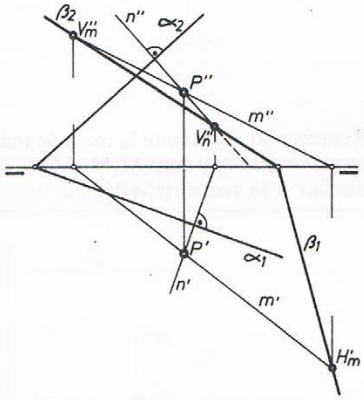

Fig. 60

D. *Un plano es perpendicular a otros dos cuando lo es a la recta de intersección de ambos* **(Fig. 61).** Este problema se resuelve en proyecciones en la **Fig. 62.** Tenemos los planos Ω -Ω' y ξ -ξ' y el punto m -m' . Se halla la recta intersección i -i' de estos dos planos y por el punto m - m' se traza el plano α -α', perpendicular a i -i' . Este plano α es la solución.

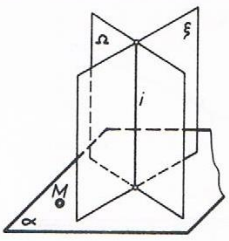

Fig. 61

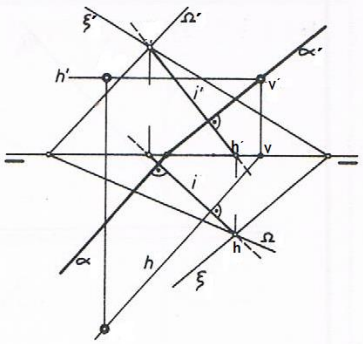

Fig. 62